Bacen – Recursos 2010 / Marcus Pio

Prezados concursandos!!!
Muita paz para todos!!!

Meus queridos, sem mais delongas, passemos aos comentários das questões de ESTATÍSTICA propostas pela CESGRANRIO no concurso do BACEN (Áreas 2e 3), ocorrido no último domingo (31 Jan 2010):

ÁREA 2

10ª QUESTÃO

A variável aleatória contínua x tem a seguinte função de densidade de probabilidade: $f(x) = \frac{x}{12} - k$, $se\ 0 \le x \le 3\ e\ f(x) = 0$ para todos os outros valores de x. Sendo k uma constante, seu valor é igual a

(A) 1
(B) 3/4
(C) 2/3
(D) 5/24
(E) 1/12

Comentário: Basta integrar $f(x)$ de 0 até 3, igualando a integral a 1. Daí, tem-se:

$$\int_0^3 (\frac{x}{12} - k)\,dx = 1 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{24} - kx\right)_0^3 = 1 \Rightarrow \left(\frac{3^2}{24} - 3k\right) - 0 = 1 \Rightarrow 3k = \frac{9}{24} - 1 \Rightarrow 3k = \frac{3}{8} - 1 \Rightarrow 3k = -\frac{5}{8} \Rightarrow$$

$$k = -\frac{5}{24}$$

NÃO TEM ALTERNATIVA CORRETA. NOTE QUE SE A fdp FOSSE $f(x) = \frac{x}{12} + k$, ENCONTRARÍAMOS $k = \frac{5}{24}$ (GABARITO FORNECIDO PELA CESGRANRIO). DEVE TER OCORRIDO ALGUM ERRO NA DIGITAÇÃO DA QUESTÃO.
PODEM ENTRAR COM RECURSO!!!

11ª QUESTÃO

A probabilidade de um indivíduo de classe **A** comprar um automóvel é 3/4. Para um indivíduo de classe **B**, essa probabilidade é 1/6, e para um indivíduo de classe **C**, ela é de 1/20. A probabilidade de um indivíduo de classe **A** comprar um Fusca é 1/10, enquanto que, para um indivíduo de classe **B**, essa probabilidade é 3/5, e para um indivíduo de classe **C**, é de 3/10. Sabendo-se que a revendedora XPTO vendeu um Fusca, a probabilidade de o comprador pertencer à classe **B** é

(A) 0,527
(B) 0,502
(C) 0,426
(D) 0,252
(E) 0,197

Comentário: Trata-se de uma questão de probabilidade condicional, aplicando o diagrama da árvore, tem-se:

$$\begin{cases} * \xrightarrow{\frac{3}{4}} A \text{ comprar um automóvel} \xrightarrow{\frac{1}{10}} \text{Comprar um fusca} \\ * \xrightarrow{\frac{1}{6}} B \text{ comprar um automóvel} \xrightarrow{\frac{3}{5}} \text{Comprar um fusca} \\ * \xrightarrow{\frac{1}{20}} C \text{ comprar um automóvel} \xrightarrow{\frac{3}{10}} \text{Comprar um fusca} \end{cases}$$

Daí, calculando a probabilidade tem-se:

$$P(\text{comprador pertencer à classe } B / XPTO \text{ vendeu um fusca}) = \frac{\left(\frac{1}{6} x \frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{3}{4} x \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{6} x \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{20} x \frac{3}{10}\right)} =$$

$$\frac{0{,}1}{0{,}075 + 0{,}1 + 0{,}015} = \frac{0{,}1}{0{,}19} = \frac{10}{19} = 0{,}52632 \approx 0{,}526$$

Resposta menos errada: LETRA (A)
NA MINHA OPINIÃO NÃO É PASSÍVEL DE RECURSO.

12ª QUESTÃO

Em um estudo sobre a economia informal de uma cidade, deseja-se determinar uma amostra para estimar o rendimento médio dessa população, com um grau de confiança de 95% de que a média da amostra aleatória extraída não difira de mais de R$ 50,00 da média do rendimento dessa população, cujo desvio padrão é R$ 400,00. Sabendo-se que Z ~ N[0, 1] e que $\int_0^{1,96} f(z)\,dz = 0{,}4750$, onde f(z) é a função de densidade de probabilidade de z, pode-se concluir que o número de pessoas da amostra será

(A) 321
(B) 308
(C) 296
(D) 271
(E) 246

Comentário: Trata-se de uma questão de cálculo de tamanho de amostra, cuja fórmula é $E = Z_{\alpha/2}\, x \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **. Daí, para** $E = 50$, $Z_{2,5\%} = 1{,}96$, $\sigma = 400$ **, tem-se:**

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\,\sigma}{E}\right)^2 \Rightarrow n = \left(\frac{1{,}96\, x 400}{50}\right)^2 \Rightarrow n = (1{,}96\, x 8)^2 = 245{,}86 \Rightarrow n = 246\,.$$

Resposta Correta: LETRA (E)

13ª QUESTÃO

Com relação a um teste simples de hipótese, assinale a afirmativa correta.

(A) Um teste bicaudal de nível de significância α rejeita a hipótese nula H_0: $\mu = \mu_0$ precisamente quando μ_0 está fora do intervalo de confiança de nível (1 − α) para μ.
(B) A hipótese nula a ser testada deve ser construída com muita atenção porquanto é o objeto da inferência estatística, enquanto que a hipótese alternativa só precisa ser contrária à hipótese nula.
(C) Se o grau de significância do teste é α, significa que (1−α) é a probabilidade de se cometer erro do tipo I.
(D) Na definição de um teste, deve-se levar em conta que quanto menor o grau de significância do teste (α), maior será o poder do teste (π), uma vez que (α + π) = 1.
(E) Erro do tipo II, embora definido para uma hipótese alternativa específica, ocorrerá sempre com probabilidade igual ao poder do teste.

Comentário: Uma questão teórica de teste de hipótese.
(A) (Correta) Se μ_0 pertence a região crítica, rejeita-se H_0
(B) (Errada) Não obrigatoriamente H_1 deve ser contrária a H_0
(C) (Errada) P(erro Tipo I) = α
(D) (Errada) Poder do teste = 1 - β, onde β é a probabilidade de erro tipo II
(E) (Errada) Poder do teste = 1 - β, onde β é a probabilidade de erro tipo II
Resposta Correta: LETRA (A)

14ª QUESTÃO

Fonte de variação	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Média de quadrados	F
Fator	6752,0	2		
Erro	30178,0			
Total	36930,0	29		

Analisando a tabela ANOVA acima, considere as conclusões a seguir.

I - A análise de variância (ANOVA) testa se várias populações têm a mesma média; para tanto, são comparadas a dispersão das médias amostrais e a variação existente dentro das amostras.

II - ANOVA da tabela indica que: H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_a: as médias das três populações são diferentes.

III - A estatística F, calculada com a informação da tabela acima, é 2,651 e deve ser comparada com o valor tabelado de F(2, 29) para um grau de significância escolhido.

É correto **APENAS** o que se conclui em

(A) I.
(B) III.
(C) I e II.
(D) I e III.
(E) II e III.

Comentário:

I) (V) A análise de variância testa a igualdade das médias amostrais, através da comparação da variação existente dentro das amostras com a dispersão das médias amostrais.

II) (F) Caracterização da estrutura do teste mencionado no item I. A hipótese alternativa H_a deveria ser pelo menos uma das médias é diferente das demais.

III) (F)

Observando a tabela temos que n – 1 = 29; n = 30; k = 2; n – k – 1 = 27. A estatística F será dada por: F = MQR/MQE = (SQR/k)/(SQE/n-k-1) = (6752/2)/(30178/27) = 3376/1117,7 = 3,02. Note que a análise dos graus de liberdade já seria suficiente para concluirmos que a afirmativa III está errada, quando diz que o nº de graus de liberdade do denominador (SQE) é 29 e não 27.

Resposta Correta: LETRA (A). A CESGRANRIO forneceu gabarito letra (C).

PODEM ENTRAR COM RECURSO!!!

ÁREA 3

26ª QUESTÃO

Se X e Y são duas variáveis aleatórias, para as quais são definidas: E(X) e E(Y), suas esperanças matemáticas (expectâncias); Var(X) e Var(Y), suas respectivas variâncias, e Cov(X, Y), a covariância entre X e Y, quaisquer que sejam as distribuições de X e Y, tem-se que

(A) E(XY) = E(X) + E(Y) – 2Cov(X, Y)
(B) E(X) . E(Y) = E(XY) – Cov(X, Y)
(C) E(3X + 2Y) = 9E(X) + 4E(Y)
(D) Var(X + 5) = Var(X) + 5
(E) Cov(X, Y) = Var(X) . Var(Y)

Comentário: Trata-se de uma questão de propriedades de média, variância e covariância de duas variáveis aleatórias X e Y. Sabe-se que quaisquer que sejam X e Y, tem-se que:
E(XY) = E(X).E(Y) + Cov (X, Y), ou seja, E(X) . E(Y) = E(XY) – Cov (X, Y).
Note que:
(A) E(XY) = E(X).E(Y) + Cov (X, Y) (F)
(C) E(3X + 2Y) = 3E(X) + 2E(Y) (F)
(D) V(X + 5) = V(X) (F)
(E) Cov(X, Y) = E(XY) – E(X) .
Resposta Correta: LETRA (B)

28ª QUESTÃO

Sobre variáveis aleatórias, considere as afirmações a seguir.

I - Para toda e qualquer variável aleatória, sua função de densidade de probabilidade fornece a probabilidade de ocorrência de cada valor da variável aleatória considerada, exceto no caso de variáveis aleatórias contínuas, para as quais a probabilidade de ocorrência de um valor específico é zero.

II - A esperança matemática (expectância) de uma variável aleatória discreta, ou seja, seu valor esperado, é a média dessa variável aleatória, que é definida como um n-avos do somatório dos valores possíveis dessa variável multiplicados por suas respectivas probabilidades.

III - A distribuição binomial é uma extensão direta da Distribuição de Bernoulli, uma vez que o experimento aleatório que caracteriza a binomial nada mais é do que um Experimento de Bernoulli repetido n vezes.

É correto **APENAS** o que se afirma em

(A) II.
(B) III.
(C) I e II.
(D) I e III.
(E) II e III.

Comentário:

(I) (V)

(II) (F). $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i . f(x_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i . P(X = x_i)$

(III) (V)

Resposta Correta: LETRA (D)

31ª QUESTÃO

Se X é uma variável aleatória descrita por uma função conjunto de probabilidades $P_X(.)$, a função de distribuição de probabilidade de X, F(x) terá, entre outras, as seguintes propriedades:

I - F(x) é monotônica não decrescente;

II - $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$;

III - F(x) é contínua à direita.

É(São) correta(s) a(s) propriedade(s)

(A) II, apenas.
(B) I e II, apenas.
(C) I e III, apenas.
(D) II e III, apenas.
(E) I, II e III.

Comentário: Uma questão que cobrou o conhecimento das propriedades da FDA de uma V.A.

I – (V) F(x) é montônica e não decrescente, podendo ser da forma escada e contínua apartir da direita, pois $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \ e \ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

II – (F) Vide comentário do item I.

III – (V) Vide comentário do item I.

Resposta Correta: LETRA (C)

32ª QUESTÃO

De uma população infinita X, com distribuição normal, com média μ e variância 9, extraiu-se, aleatoriamente, a seguinte amostra de 4 elementos: {x: 1,2; 3,4; 0,6; 5,6}. Com base no estimador de máxima verossimilhança de μ, para um grau de significância de α, estimou-se o intervalo de confiança para a média em [−0,24; 5,64]. Da mesma população, extraiu-se uma amostra 100 vezes maior que a anterior e verificou-se que, para essa nova amostra, a estimativa da média amostral era igual à obtida com a primeira amostra. Com o mesmo grau de significância α, o intervalo de confiança estimado, com base na nova amostra, foi

(A) [2,406; 2,938]
(B) [2,406; 2,994]
(C) [2,435; 2,965]
(D) [2,462; 2,938]
(E) [2,462; 2,965]

Comentário: Sabe-se que a estimativa de máxima verossimilhança para μ de uma população com distribuição normal é dada por: $\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1,2 + 3,4 + 0,6 + 5,6}{4} = \frac{10,8}{4} = 2,7$

Para o intervalo dado [- 0,24; 5,64], tem-se $\overline{X} = \frac{-0,24 + 5,64}{2} = \frac{5,40}{2} = 2,70$ **e E = 5,64 – 2,70 = 2,94.**

Sabe-se também que tendo em vista a fórmula $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$**, quando multiplicamos o tamanho n da amostra por 100, dividimos o erro E por 10. Logo, o erro E do novo intervalo será dado por 2,94/10 = 0,294. Daí, o novo intervalo será dado por 2,70 ± 0,294 = [2,406; 2,994].**

Resposta Correta: LETRA (B)

35ª QUESTÃO

Sejam duas variáveis aleatórias X e Y com variâncias finitas e não zero. O coeficiente de correlação entre essas duas variáveis é $\rho = \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$, onde

ρ = coeficiente de correlação entre X e Y;

cov(X, Y) = covariância entre X e Y;

σ_X e σ_Y são, respectivamente, desvio padrão de X e desvio padrão de Y.

Considerando essas informações, analise as proposições a seguir.

I – Se a e b são constantes, $\text{cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2ab}\{\text{var}(aX + bY) - [a^2 \text{ var}X + b^2 \text{ var}Y]\}$.

II – Se $\rho = -1$, $\left(\dfrac{X}{\sigma_X} + \dfrac{Y}{\sigma_Y}\right)$ torna-se não estocástica.

III – Se cov(X,Y) = 0, então $\rho = 0$ e, X e Y são estocasticamente independentes.

É(São) correta(s) **APENAS** a(s) proposição(ões)

(A) I.

(B) II

(C) I e II.

(D) I e III.

(E) II e III.

Comentário:

I – (V)

$$\frac{1}{2ab}\{\text{var}(aX + bY) - [a^2 \text{var}\, X + b^2 \text{var}\, Y]\} = \frac{1}{2ab}\left(a^2 \text{var}\, X + b^2 \text{var}\, Y + 2abCov(X,Y)\right) - a^2 \text{var}\, X - b^2 \text{var}\, Y)$$

$$= \frac{1}{2ab} x2abCov(X,Y) = Cov(X,Y)$$

II – (V). Quando $\rho = -1$, tem-se uma correlação linear negativa perfeita, fazendo-se com que a correlação de X e Y seja previsível e não estocástica.

III – (F). A Cov(X, Y) = 0 não implica garantir que X e Y são INDEPENDENTES, pode-se garantir apenas que não existe correlação linear.
Resposta Correta: LETRA (C)

Queridos alunos, é uma pena que a CESGRANRIO não tenha dispensado a devida atenção a um concurso tão esperado como este do BACEN. A questão 10 (área 3) com erro de enunciado, a questão 14 (área 3) com gabarito errado, causando um grande prejuízo para os concurseiros muito bem preparados. Foi uma prova extremamente simples, com exigências superficiais dos conceitos.

Um forte abraço a todos,
Fiquem todos com DEUS!
Prof Pio.